

ตัวแบบมาร์คอฟในการพยากรณ์สถานะโรค

วัฒนา ชยธวัช^{1*}

¹ หลักสูตรการแพทย์แผนไทยบัณฑิต คณะสาธารณสุขศาสตร์และสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยปทุมธานี

ผู้นิพนธ์ที่ให้การติดต่อ E-mail: vadhana.j@ptu.ac.th

บทคัดย่อ

ตัวแบบมาร์คอฟได้ถูกนำไปใช้ในการพยากรณ์สถานะโรคในต่างประเทศและในประเทศไทย ในการวิจัยทางคลินิกในประเทศไทยมักยุติที่การทดลองได้ผลแตกต่างหรือไม่ (significant) แต่ตัวแบบมาร์คอฟสามารถให้ข้อมูลเกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการพยากรณ์สถานะโรคได้ บทความนี้จะได้นำเสนอทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟตั้งแต่การกำหนดสถานะ เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ และการประเมินสถานะให้ดำเนินต่อเนื่องไปจนถึงจุดสมดุล พร้อมทั้งนำตัวอย่างกรณีการวิจัยนวดไทยมาแสดงโดยเริ่มตั้งแต่การประมวลผลข้อมูล การสร้างเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากข้อมูล และการพยากรณ์ผลการรักษาไปในอนาคต

คำสำคัญ : การพยากรณ์สถานะโรค, ตัวแบบมาร์คอฟ, เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ, สถานะ

Markov Model in Medical Prognosis

Vadhana Jayathavaj^{1*}

¹ Thai Traditional Medicine Curriculum, Faculty of Public Health and Environment, Pathumthani University

Corresponding Author E-mail: vadhana.j@ptu.ac.th

Abstract

Markov models had been used in medical prognosis both in foreign and in Thailand. In Thailand, the clinical research almost completes at significant in hypothesis testing, but Markov model has an ability to project about the state probability of the disease. This article presented Markov chain theory from the definition of state, transition probability matrix, and the projecting to the next stages until equilibrium. The example was come from the research in Thai massage that starting from data processing, construct the transition probability matrix, and forecasting the future state probability.

Keyword: Medical Prognosis, Markov Model, Transition Probability Matrix, State

บทนำ

ตัวแบบมาร์คอฟ (Markov models) ใช้กับการตัดสินใจที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องในช่วงเวลาหนึ่ง โดยในทาง การแพทย์กำหนดให้ผู้ป่วยมีพยาธิสภาพในสถานะต่าง ๆ (Markov states) และเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก็คือ สถานะที่ สามารถเปลี่ยนจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง (transition) ซึ่งทำให้สามารถใช้พีชคณิตเมตริกซ์ในการคำนวณ สถานะของผู้ป่วยในอนาคตได้^{1,2} เป็นการพยากรณ์รายการอนุกรมเวลา (categorical time series prediction) ที่ รายการหนึ่งรายการมีรายการย่อยหรือสถานะหลายสถานะ ได้แก่ การศึกษาถึงต้นทุนและคุณภาพชีวิตในการบำบัด ทดแทนไต (Renal replacement therapy RRT) 3 วิธีกับผู้ป่วยโรคไตเรื้อรังในยุโรป โดยจำแนกสถานะของผู้ป่วย ตั้งแต่ เริ่มวินิจฉัยว่าเป็นโรคไต (init) มีการฟอกไต haemodialysis 1-12 เดือน (HD) 13-24 เดือน (HP) และ เดือนที่ 25 เป็นต้นไป (HM) การล้างไตทางช่องท้อง peritoneal dialysis 1-12 เดือน (PD) 13-24 เดือน (PP) และ เดือนที่ 25 เป็นต้นไป (PM) การปลูกถ่ายไตจากผู้ป่วยมีชีวิตใน 12 เดือนแรก (living-donor kidney transplantation) (TL) การปลูกถ่ายไตจากผู้ป่วยเสียชีวิตใน 12 เดือนแรก (deceased-donor kidney transplantation) (TD) การปลูกถ่ายไตเดือนที่ 13-24 (TM) และ เดือนที่ 25 เป็นต้นไป (TP) และ เสียชีวิต (Dead) โดยการใช้ตัวแบบมาร์คอฟ (Markov model) ในการคำนวณสถานะของผู้ป่วย³ การศึกษาความน่าจะเป็น ของการกลับเข้ามาเป็นผู้ป่วยในซ้ำของผู้ที่เป็นโรคปอดอุดกั้นเรื้อรัง (Chronic Obstructive Pulmonary Disease หรือ COPD) หรือ ภาวะการหายใจล้มเหลว (Respiratory Failure RF) กล่าวได้ว่าเป็น ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain) โดยสถานะของการเป็นผู้ป่วยในซ้ำ คือ จำนวนครั้งที่เข้ารับรักษาตัวเป็นผู้ป่วยในในรอบ 1 ปี⁴ ในประเทศไทย พบการนำวิธีการลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain) มาใช้ในการประเมินผลทางเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์ต้นทุน อรรถประโยชน์เปรียบเทียบระหว่างการฟอกเลือดกับการล้างไตทางช่องท้องอย่างต่อเนื่องในผู้ป่วยไตวายระยะ สุดท้าย^{5,6} ตัวแบบมาร์คอฟ ในปัญหาเกี่ยวกับโรคเรื้อรังซึ่งสามารถจำแนกผู้ป่วยแต่ละคนออกเป็น ปกติ ป่วย หรือ ตาย ที่เวลาที่ k และเมื่อเวลาผ่านไปเป็นเวลา $k+1$ แล้ว ผู้ป่วยคนหนึ่งจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งก็ได้ กล่าวคือมีการเปลี่ยนสถานะ (transition) ซึ่งก็จะเป็นเช่นไปทุก ๆ ช่วงเวลา⁷

การพยากรณ์สถานะของโรคกลับมาจากประสบการณ์ของหมอ ในการแพทย์แผนไทยมักจะมีคำถามอยู่เสมอว่า เมื่อ ทำการนวดไปแล้ว 1 ครั้งจะต้องนวดต่อไปอีกกี่ครั้งจึงจะหายเป็นปกติ ซึ่งย่อมต้องมีการประเมินจากผลการนวดแต่ ละครั้งว่าทำให้สถานะของโรค เช่น ระดับความเจ็บปวดเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เป็นต้น ส่วนคำถามว่าต้อง รับประทานยาตำมจำนวนกี่หม้อจึงจะหายเป็นปกติ ก็ต้องประเมินจากผลการรับประทานยา เมื่อรับประทานยาจน ครบกำหนดแล้วมีสถานะตามอาการโรคเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร หากผู้ประกอบการวิชาชีพการแพทย์แผนไทยสามารถ ประเมินพยาธิสภาพได้แล้ว การเปลี่ยนสถานะของผลการรักษาแต่ละครั้งสามารถนำมาทำการคำนวณประมาณการ ผลการรักษาไปในอนาคตจากผลการรักษาในอดีตได้

วัตถุประสงค์

บทความนี้นำเสนอตัวแบบมาร์คอฟซึ่งเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์สถิติที่สามารถนำมาใช้ในการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้ในการวิจัยทางคลินิกเกี่ยวกับการพยากรณ์สถานะของผลการรักษา

ตัวแบบมาร์คอฟ

ตัวแบบมาร์คอฟ หรือ ลูกโซ่มาร์คอฟ เป็นกระบวนการสุ่มแบบสุ่ม (a stochastic process) แบบไม่ต่อเนื่อง (the discrete-time process) สามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ของสรรพสิ่งบนโลกที่มีการเปลี่ยนแปลงสถานะไปตามเวลา ผู้ที่นำเสนอวิธีการนี้ คือ Andrei Markov (1856–1922) ในปี ค.ศ. 1907⁸⁻¹¹

สำหรับลูกโซ่มาร์คอฟที่มีจำนวนสถานะจำกัด (a finite state space) หมายถึงมีจำนวนสถานะที่แน่นอนจำนวน n สถานะ ($S = \{s_i\} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$) ซึ่ง n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าศูนย์ และ $n \geq 2$ แล้ว ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะคือสมาชิกของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ (แถว $\times$ คอลัมน์ของเมตริกซ์) สำหรับเมตริกซ์ T เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนสถานะ (transition matrix) เมื่อ t_{ij} เป็นสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j คือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก s_i ไปเป็นสถานะ s_j เมื่อ $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($s_i \in S$ และ $s_j \in S$) กระบวนการมีการเปลี่ยนสถานะจากสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่ง (รวมถึง การอยู่ที่สถานะเดิมก็ได้) เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นในกระบวนการ T ถูกเรียกว่าเป็น เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ สำหรับสถานะ s_i ใด ๆ $t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{in} = 1$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

การดำเนินไปของตัวแบบมาร์คอฟในแต่ละขั้นตอนจะใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ k โดยเริ่มจากที่สถานะเริ่มต้น ($k = 0$) แล้วมีการเปลี่ยนแปลงตามเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของกระบวนการสู่ขั้นตอนที่ 1 ($k = 1$) และเปลี่ยนจากขั้นตอนที่ 1 สู่ขั้นตอนที่ 2 ($k = 2$) ไปเรื่อย ๆ คำว่าขั้นตอนก็สามารถเทียบเท่ากับแต่ละครั้งที่มารับการรักษาก็ได้

เมตริกซ์แถว ก็คือ เวกเตอร์ $P_k = [p_1^{(k)} p_2^{(k)} \dots p_n^{(k)}]$ เป็นความน่าจะเป็นของสถานะที่ขั้นตอนที่ k หรือ เรียกว่า เวกเตอร์ความน่าจะเป็น P_k ที่มีสมาชิกเป็น $p_1^{(k)} p_2^{(k)} \dots p_n^{(k)}$ วงจรการเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็น $p_i^{(k)}$ คือ ความน่าจะเป็นของกระบวนการสถานะที่ i ในขั้นตอนที่ k สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ และ $k = 1, 2, \dots$ และ $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + \dots + p_n^{(k)} = 1$

การพยากรณ์เหตุการณ์ไปข้างหน้าที่ขั้นตอนที่ $k+1$ (หรือช่วงเวลา $k+1$) ความน่าจะเป็นของสถานะในเวลา $k+1$ คือ $P_{k+1} = P_k T$ และ $P_{k+1} = P_0 T^k$ สำหรับทุกค่าของ k

$$P_{k+1} = [p_1^{(k+1)} p_2^{(k+1)} \dots p_n^{(k+1)}]$$

$$= P_k T$$

(เป็นการคูณเวกเตอร์กับเมตริกซ์)

$$= [p_1^{(k)} p_2^{(k)} \dots p_n^{(k)}] \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

สูตรการคำนวณค่า p_i^{k+1} จากการคูณกันของเวกเตอร์กับเมตริกซ์ ดังนี้

$$p_i^{k+1} = \sum_{r=1}^n p_r^{(k)} t_{ri}$$

การคูณเมตริกซ์สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในรูปตารางประมวลผลได้โดยง่าย (เช่น โปรแกรม EXCEL ใช้สูตร =MMULT(array1,array2) เป็นต้น) ผลของการคูณเมตริกซ์สำหรับค่าสถานะของ $p_i^{(k+1)}$ ก็คือผลรวมของสัดส่วนเดิมของสถานะ r ที่เปลี่ยนแปลงมาสู่สถานะ i ด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลง t_{ri} เมื่อ $r=1,2,...,n$

ลูกโซ่มาร์คอฟจะเรียกว่าเป็น “ลูกโซ่เออร์โกดิก” (Ergodic chain) ถ้ามีความเป็นไปได้เมื่อขั้นตอนดำเนินไปเรื่อย ๆ ในระยะยาวไม่สิ้นสุดแล้ว ลูกโซ่เออร์โกดิกมีแนวโน้มเข้าสู่สถานะสมดุล ซึ่งความน่าจะเป็นของสถานะเวกเตอร์ P_k มีค่าคงที่ $P=[p_1 \ p_2 \ ... \ p_n]$ จะถูกเรียกว่า สถานะถึงเวกเตอร์ขีดจำกัดของวงจรที่ดำเนินไปที่สถานะสมดุลจะมี $P=PT$ (หมายความว่า ความน่าจะเป็นของสถานะไม่เปลี่ยนแปลงอีกต่อไป) และ $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ ทำให้สามารถใช้คุณสมบัติของลูกโซ่เออร์โกดิกในการพยากรณ์สถานะของปรากฏการณ์ในอนาคตระยะยาวได้ การใช้เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ T ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนเป็นตัวคูณกับสถานะไปเรื่อย ๆ นี้ เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ T จึงเป็นตัวสะท้อนการดำเนินงานว่าถ้ามีการดำเนินอย่างเดิมก็จะส่งผลให้มีการเปลี่ยนแปลงเช่นเดิม อันเป็นหลักการที่สำคัญของลูกโซ่มาร์คอฟ

คุณสมบัติของกระบวนการมาร์คอฟ¹²

คุณสมบัติที่ 1 ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะจากสถานะเริ่มต้นรวมกันแล้วต้องเป็น 1

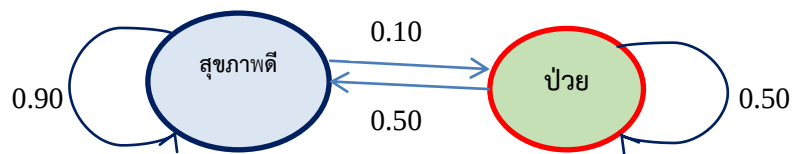
คุณสมบัติที่ 2 ความน่าจะเป็นจะเกิดกับทุกหน่วยที่เกี่ยวข้องในระบบ

คุณสมบัติที่ 3 ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะคงที่ตลอดเวลา

คุณสมบัติที่ 4 สถานะแต่ละสถานะเป็นอิสระต่อกัน ต่างดำเนินไปโดยอิสระ

ลูกโซ่มาร์คอฟแบบไม่ต่อเนื่อง (The discrete time Markov chain) กำหนดโดยคู่ของเซต (set) $\{S,T\}$ เมื่อ S เป็น เซตของสถานะที่มีจำนวนจำกัด หมายถึง มีจำนวนสถานะที่เกิดขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งเป็นจำนวนที่แน่นอน ดังแผนผังการเปลี่ยนสถานะภาพที่ 1 เมื่อ $S = \{\text{สุขภาพดี}, \text{ป่วย}\}$ และ T เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ ดังแสดงในตารางที่ 1 และแสดงเป็นเมตริกซ์ ดังแสดงในภาพที่ 2 จากแผนผังการเปลี่ยนสถานะภาพที่ 1 สถานะสุขภาพดีมีความน่าจะเป็นที่จะยังคงสุขภาพดีต่อไป 0.90 และป่วย 0.10 ส่วนสถานะป่วยยังคงมีความน่าจะเป็นที่จะป่วยต่อไป 0.50 และกลับมาสุขภาพดี 0.50

ลูกโซ่มาร์คอฟแบบไม่ต่อเนื่อง (The discrete time Markov chain) กำหนดโดยคู่ของเซต (set) $\{S,T\}$ เมื่อ S เป็น เซตของสถานะที่มีจำนวนจำกัด หมายถึง มีจำนวนสถานะที่เกิดขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งเป็นจำนวนที่แน่นอน ดังแผนผังการเปลี่ยนสถานะภาพที่ 1 เมื่อ $S = \{\text{สุขภาพดี}, \text{ป่วย}\}$ และ T เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ ดังแสดงในตารางที่ 1 และแสดงเป็นเมตริกซ์ ดังแสดงในภาพที่ 2 จากแผนผังการเปลี่ยนสถานะภาพที่ 1 สถานะสุขภาพดีมีความน่าจะเป็นที่จะยังคงสุขภาพดีต่อไป 0.90 และป่วย 0.10 ส่วนสถานะป่วยยังคงมีความน่าจะเป็นที่จะป่วยต่อไป 0.50 และกลับมาสุขภาพดี 0.50



ภาพที่ 1 แผนผังการเปลี่ยนสถานะ เมื่อ S เป็นสถานะที่มีจำนวนจำกัด คือ {สุขภาพดี, ป่วย}

ตารางที่ 1 ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ

สถานะที่เป็นอยู่	สถานะถัดไป		
	สุขภาพดี	ป่วย	รวม
สุขภาพดี	0.90	0.10	1
ป่วย	0.50	0.50	1

$$\begin{array}{c}
 \text{Healthy} \quad \text{Ill} \\
 \text{Healthy} \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.50 & 0.50 \end{pmatrix} \\
 \text{Ill}
 \end{array}$$

ภาพที่ 2 ตัวอย่าง T เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ

ตัวอย่างของการเปลี่ยนสถานะรูปแบบพิเศษ

รูปแบบการเปลี่ยนสถานะที่เปลี่ยนไปแล้วไม่กลับคืน

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .3 & .7 & 0 \\ .4 & .6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

จะพบว่า ระบบได้เปลี่ยนจากสถานะ 3 ไปเป็น 1 โดยไม่กลับไปสู่สถานะ 3 อีก

รูปแบบของการเปลี่ยนสถานะวนเวียนกลับไปกลับมาในสองสถานะ

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

สถานะจะวนเวียนจากสถานะ 1 ไปสถานะ 2 และจาก สถานะ 2 กลับมาที่สถานะ 1

รูปแบบของการติดค้างที่สถานะใดสถานะหนึ่ง

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .2 & .7 & .1 \\ .3 & .5 & .2 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

สถานะที่เรียกว่า สถานะดูดซับ (absorbing state) คือเมื่อเปลี่ยนมาที่สถานะ 3 แล้ว ก็ติดกับอยู่ที่สถานะ 3 ไม่ไปที่สถานะอื่นอีกต่อไป

การอธิบายทฤษฎีของตัวแบบมาร์คอฟในรูปแบบคำนิยามและสัญลักษณ์ทางสถิติเป็นวิธีการหนึ่งที่ทำให้ดูเป็นวิชาการและรวบรัด การมีกรณีตัวอย่างจะทำให้ผู้สนใจสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ จึงขอเสนอกรณีตัวอย่างซึ่งจำลองขึ้นเพื่อความเข้าใจ ดังนี้

ตัวอย่างกรณีการนวดไทย

ในการทดลองทางคลินิกกับอาสาสมัครจำนวน 15 คน พบว่า มีสถานะของการนวดที่วัดด้วยระดับความปวด กำหนดให้มี 7 ระดับ ตั้งแต่ 0, 1, 2, ..., 6 คือ ตั้งแต่ไม่ปวดไปจนถึงปวดมากที่สุด ($S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) ดังนั้นสถานะของความเปลี่ยนจากการนวดแต่ละครั้งต่อเนื่องกัน ก็จะเปลี่ยนจากระดับความปวด 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ไปเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ได้ ซึ่งเมตริกซ์สถานะของการเปลี่ยนแปลง ก็คือ เมตริกซ์ขนาด 7×7 ($n \times n$) โดยมีค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะเป็น t_{ij} เมื่อ $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ t_{ij} ก็คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะที่ i ไปเป็น j เมตริกซ์สถานะของการเปลี่ยนแปลงได้มาจากการแจกแจงจำนวนผู้ป่วยที่รักษาตามสถานะที่จำแนกตามระดับความปวด ผลการรักษา ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 การแจกแจงความถี่ระดับความปวด ก่อนและหลังการรักษา ครั้งที่ 1

สถานะ ก่อน	หน่วย 'คน'							รวม
	สถานะหลังการรักษา 0	1	2	3	4	5	6	
0								
1								
2								
3								
4			1	7				8
5				1	4			5
6					1	1		2
รวม			1	8	5	1		15

จากตารางที่ 2 ทำการคำนวณสัดส่วนการคำนวณแต่ละแถว ดังแสดงในตารางที่ 3 จะได้ผลรวมที่แถว 4 5 และ 6 เป็น 1 ส่วนแถวที่ 0 1 2 และ 3 ไม่มีข้อมูล ผลรวมจึงเป็นศูนย์ ค่าในตารางคือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากก่อนการนวดไปเป็นหลังการนวด ความน่าจะเป็นสถานะก่อนการนวดรักษา [0.00 0.00 0.00 0.00 0.53 0.33 0.13] ความน่าจะเป็นสถานะหลังการนวดรักษา [0.00 0.00 0.07 0.53 0.33 0.07 0.00]

ตารางที่ 3 ความน่าจะเป็นของระดับความปวด ก่อนและหลังการรักษา ครั้งที่ 1

สถานะ ก่อน	หลัง								สถานะ ก่อน
	0	1	2	3	4	5	6	รวม	
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.13	0.88	0.00	0.00	0.00	1.00	0.53
5	0.00	0.00	0.00	0.20	0.80	0.00	0.00	1.00	0.33
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.13
สถานะ หลัง ครั้งที่ 1	0.00	0.00	0.07	0.53	0.33	0.07	0.00	1.00	1.00

การประมาณการสถานะของความปวดไปข้างหน้าแสดงในตารางที่ 4 ความน่าจะเป็นของสถานะเริ่มต้น ก่อนการนัดครั้งที่ 1 คือ P0 เมื่อคูณด้วยเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะตารางที่ 3 ก็จะได้ความน่าจะเป็นของสถานะหลังการนัดครั้งที่ 1 $P0 \rightarrow 1$ เมื่อนำ $P0 \rightarrow 1$ คูณกับเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะตารางที่ 3 อีกครั้ง ได้ $P0 \rightarrow 2$ ซึ่งพบว่า ผลรวมของ $P0 \rightarrow 2$ น้อยกว่า 1 แสดงว่า กระบวนการไม่ถูกต้อง จึงปรับปรุง ตารางที่ 3 ให้สอดคล้องกับคุณสมบัติของตัวแบบมาร์คอฟ คือ แถวที่หรือระดับความปวดที่ 0 1 2 3 ให้อยู่ที่เดิมจึงเติมความน่าจะเป็น 1 ลงไปในการเปลี่ยนสถานะจาก 0 ไปเป็น 0 จาก 1 ไปเป็น 1 จาก 2 ไปเป็น 2 จาก 3 ไปเป็น 3 ตามลำดับ ดังแสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 4 การประมาณการไปหลังการนัดครั้งที่ 1 ไปยังหลังการนัดครั้งที่ 2

สถานะ	0	1	2	3	4	5	6	รวม
P0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	0.33	0.13	1.00
$P0 \rightarrow 1$	0.00	0.00	0.07	0.53	0.33	0.07	0.00	1.00
$P0 \rightarrow 2$	0.00	0.00	0.04	0.31	0.05	0.00	0.00	0.40

เมื่อทำการประมาณการไปในการนัดครั้งต่อ ๆ ไป พบว่า S1 เป็นค่าเดียวกับสถานะหลังครั้งที่ 1 ส่วนการประมาณ S2 ด้วยการคูณ S1 กับเมตริกซ์ของการเปลี่ยนสถานะจากตารางที่ 5 พบความเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็นของระดับความปวดลดลงมาที่ความปวดน้อยลง กล่าวคือ ระดับ 5 หายไป เมื่อประมาณการต่อไปสำหรับ S3 S4 คงที่แล้ว โดยที่ความปวดระดับ 4 หายไปด้วย เนื่องจากการนัดครั้งที่ 1 ยังไม่สามารถลดความปวดลงมาที่ระดับ 0 และ 1 ได้อย่างใด อาจเป็นด้วยสาเหตุของการนัดครั้งแรก ดังนั้นหากมีการนัดครั้งต่อไปแล้ว ปรากฏว่ามีสถานะที่ระดับ 0 ซึ่งแปลว่า ไม่ปวด กับ 1 แล้ว ก็จะสามารถประมาณการจำนวนครั้งที่จะนัดต่อไปได้ ดังแสดงในตารางที่ 6

ตารางที่ 5 การปรับเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะให้เป็นไปตามคุณสมบัติของ กระบวนการมาร์คอฟ

ก่อน	หลัง							สถานะ	
	0	1	2	3	4	5	6	รวม	ก่อน
0	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
1	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
2	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
4	0.00	0.00	0.13	0.88	0.00	0.00	0.00	1.00	0.53
5	0.00	0.00	0.00	0.20	0.80	0.00	0.00	1.00	0.33
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	1.00	0.13
สถานะหลังการนวดครั้งที่ 1									
	0.00	0.00	0.07	0.53	0.33	0.07	0.00	1.00	1.00
ความน่าจะเป็นของสถานการณ์นวดครั้งที่ ก่อนและหลังการนวด									
S0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	0.33	0.13	1.00	
S1	0.00	0.00	0.07	0.53	0.33	0.07	0.00	1.00	
ประมาณความน่าจะเป็นของสถานการณ์นวดหลังหลังการนวดครั้งที่ 2 3 และ 4									
S2	0.00	0.00	0.11	0.84	0.05	0.00	0.00	1.00	
S3	0.00	0.00	0.12	0.89	0.00	0.00	0.00	1.00	
S4	0.00	0.00	0.12	0.89	0.00	0.00	0.00	1.00	

ตารางที่ 6 แสดงให้เห็นว่า นวดต่อไปอีก 3 ครั้ง S3 S4 S5 ก็จะเข้าสู่จุดสมดุล ความน่าจะเป็นของสถานะไม่เปลี่ยนแปลง

ตารางที่ 6 กระบวนการมาร์คอฟหลังการนัดครั้งที่ 2

หลังครั้งที่ 2								หลังครั้งที่ 1
หลังครั้งที่ 1	0	1	2	3	4	5	6	
0	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		1.00 0.00
1	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		1.00 0.00
2	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00		1.00 0.07
3	0.00	0.13	0.63	0.25	0.00	0.00		1.00 0.53
4	0.20	0.00	0.40	0.20	0.20	0.00		1.00 0.33
5	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00		1.00 0.07
6								0.00 0.00
สถานะหลัง ครั้งที่ 2								
	0.07	0.07	0.53	0.27	0.07	0.00	0.00	1.00 1.00
S1	0.00	0.00	0.07	0.53	0.33	0.07		1.00
S2	0.07	0.07	0.53	0.27	0.07	0.00		1.00
S3	0.08	0.10	0.73	0.08	0.01	0.00		1.00
S4	0.08	0.11	0.78	0.02	0.00	0.00		1.00
S5	0.08	0.11	0.80	0.01	0.00	0.00		1.00
S6	0.08	0.11	0.80	0.00	0.00	0.00		1.00
S7	0.08	0.11	0.80	0.00	0.00	0.00		1.00

ข้อสรุป

ตัวอย่างที่นำมาแสดงเป็นการนำข้อมูลการวิจัยเกี่ยวกับการนัดที่มีการประเมินระดับความปวดที่สามารถจัดสถานะ (stage) ได้ ดังนั้น หากเป็นตัวแปรอื่นที่สามารถจัดเป็นกลุ่มของสถานะได้ก็สามารถประยุกต์ตัวแบบมาร์คอฟได้เช่นกัน ตัวแบบมาร์คอฟจึงเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยที่ไม่ได้หยุดกับการทดลองเพียงการทดสอบสมมติฐานว่าแตกต่างไปจากเดิมหรือไม่ (significant) แต่ยังสามารถประเมินต่อไปข้างหน้าได้ว่า ถ้ายังรักษาแบบเดิมนี้อีกไปแล้ว โอกาส (ความน่าจะเป็น) ของสถานะของผู้ป่วยจะเป็นอย่างไร ดังที่ได้กล่าวถึงตัวอย่างการนำตัวแบบมาร์คอฟมาใช้ในการแพทย์ทั้งในต่างประเทศและในประเทศไทย

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ ดร. ชนาภานต์ ยืนยง อธิการบดี มหาวิทยาลัยปทุมธานี และ ดร. นฤนาท ยืนยง คณบดีคณะสาธารณสุขศาสตร์และสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยปทุมธานี ที่ให้การสนับสนุนการผลิตบทความวิชาการครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

1. Sonnenberg FA., and Beck JR. (1993). Markov Models in Medical Decision Making: A Practical Guide. **Medical Decision Making**, 13(4) Oct-Dec 1993: 322-338.
2. Beck JR., Stephen, and Pauker SG. (1983). The Markov Process in Medical Prognosis. **Medical Decision Making**, 3(4): 419-458. <https://doi.org/10.1177/0272989X8300300403>
3. Haller M., Gutjahr G., Kramar R., Harnoncourt F., and Oberbauer R. (2011, Sept). Cost-effectiveness analysis of renal replacement therapy in Austria. **Nephrol Dial Transplant**, 26(9):2988-95. doi: 10.1093/ndt/gfq780.
4. Bartolomeo N., Trerotoli P., Moretti A., and Serio G. (2008). A markov model to evaluate hospital readmission. **BMC Medical Research Methodology**, 8:23 doi:10.1186/1471-2288-8-23
5. ยศ ตีระวัฒนานนท์. (2549). ต้นทุนประสิทธิผลและต้นทุนอรรถประโยชน์ของการรักษาทดแทนไตในประเทศไทย. **วารสารสมาคมโรคไตแห่งประเทศไทย**, 12(2(Supplement)) May-Aug, 2006: 50-57.
6. อาริวรรณ เขียวชาญวัฒนา, จุฬารักษ์ ลิ้มวัฒนานนท์, สุพล ลิ้มวัฒนานนท์, วิโรจน์ ตั้งเจริญเสถียร, และ ทวี ศิริวงศ์, ชลทิพย์พงศ์สกุล. (2546). การวิเคราะห์ต้นทุนอรรถประโยชน์ของการฟอกเลือดกับการล้างไตทางช่องท้องอย่างต่อเนื่องในผู้ป่วยไตวายระยะสุดท้ายในประเทศไทย. **วารสารสมาคมโรคไตแห่งประเทศไทย** 9(2) May-Aug, 2003 158-169.
7. Komorowski M., and Raffa J. (2016). **Markov Models and Cost Effectiveness Analysis: Applications in Medical Research**. In: Secondary Analysis of Electronic Health Records. Springer, Cham. pp 351-367.
8. Gagniuc P. (2017). **Markov chains: from theory to implementation and experimentation**. New Jersey: John Wiley & Sons.
9. Ibe OC. (2009). **Markov processes for stochastic modelling**. Burlington: Elsevier Academic Press. 2009.
10. Lindsey JK. (2004). **Statistical analysis of stochastic processes in time**. Cambridge: Cambridge University Press.
11. Voskoglou MGr. (2016). Applications of finite Markov chain models to management. **American Journal of Computational and Applied Mathematics**, 6(1):7-13.
12. Taylor BW. (1982). **Introduction to Management Science**, 5th ed. New Jersey: Prentice Hall International.